

# Calculs de sommes et de produits

*Adamaly Moustapha*

Ce document regroupe d'innombrables sommes et produits à calculer. En effet, vu la faible quantité de documents sur internet à ce sujet, j'ai décidé d'en écrire un. Ce type de calcul est très passionnant, le fait est qu'il est assez difficile de s'auto-défier en se posant soi-même un exercice de ce type.

Ce document est destiné à des élèves de L1, de première année en CPGE, et évidemment aux passionnés de mathématiques !

Il est évident que les sommes et les produits proposés sont calculables, il n'y a pas de question ouverte. Les corrections se trouvent en fin de document. Merci d'ignorer les erreurs qui se sont sans doute glissées.

*Bonne lecture*

## A) Les sommes

### D) Les triviales...

1) Calculer  $\sum_{k=0}^n k$

2) Calculer  $\sum_{k=0}^n k^2$

3) Calculer  $\sum_{k=0}^n k^3$

4) Calculer  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + k}$

5) Calculer  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

6) Calculer  $\sum_{k=0}^n \frac{k}{k+1}$

7) Calculer  $\sum_{k=0}^n \cos kx$

8) Calculer  $\sum_{k=0}^n \sin kx$

9) Calculer  $\sum_{k=0}^n (\cos^2 kx - \sin^2 kx)$

10) Calculer  $\sum_{k=0}^n e^{ikx}$

11) Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

12) Calculer  $\sum_{k=0}^n k k!$

13) Calculer  $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$

14) Calculer  $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

15) Calculer  $\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{3^{2k-1}}$

16) Calculer  $\sum_{k=0}^n k(k+1)$

17) Calculer  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$

18) Calculer  $\sum_{0 \leq i, j \leq n} x^{i+j}$

- 19) Calculer  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}$
- 20) Calculer  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \min(i, j)$
- 21) Calculer  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \max(i, j)$
- 22) Calculer  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (\min(i, j) + \max(i, j))$
- 23) Calculer  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{2j+1}$
- 24) Calculer  $\sum_{k=0}^n (a \cos kx + b \sin kx)$

## II) Les moins triviales

- 25) Calculer  $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$
- 26) Calculer  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!(k+1)}$
- 27) Calculer  $\sum_{k=1}^{n-1} E\left(\frac{km}{n}\right)$
- 28) Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right)$
- 29) Calculer  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ ,  $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$  et  $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$
- 30) Calculer  $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$
- 31) Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k}$
- 32) Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$
- 33) Calculer  $\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$
- 34) Calculer  $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k}$
- 35) Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}$

- 36) Calculer  $\sum_{0 \leq i < j \leq n+1} \binom{n}{i} \binom{n+1}{j}$
- 37) Calculer pour  $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k}$
- 38) Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{2n-1}{k}^{-1}$
- 39) Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) \sin[(2k+1)x]$
- 40) Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(ka + (n-k)b)$
- 41) Calculer  $\sum_{k=1}^n \cos(kx) \cos^k(x)$
- 42) Calculer  $\sum_{k=1}^n \sin(kx) \sin^k(x)$
- 43) Calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{\sin^k x}$
- 44) Calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{\cos^k x}$
- 45) Calculer  $\sum_{k=0}^p \binom{n}{p-k} \binom{n}{p+k}$
- 46) Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$  et  $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1}$
- 47) Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k}$
- 48) Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos kx$  et  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin kx$
- 49) Calculer  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k}$
- 50) Calculer  $\sum_{k=0}^n kx^k$
- 51) Calculer  $\sum_{k=0}^n k^2 x^k$
- 52) Calculer  $\sum_{k=0}^n x^k \cos kx$
- 53) Calculer  $\sum_{k=0}^n (-1)^k k \cos(kx + y)$
- 54) Calculer  $\sum_{k=0}^n \cos(\sin kx)$

55) Calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos(kx)\cos(k+1)x}$

56) Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} kx^k$

57) Calculer  $\sum_{k=1}^n \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

58) Calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$

59) Soit  $n = 2p \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  et  $\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_p}$  les racines de  $x^n + 1$ .

Calculer  $\sum_{k=1}^p \frac{1}{n(x - \alpha_k)(x - \overline{\alpha_k})}$

## **B) Les produits**

### **I) Les triviaux**

1) Calculer  $\prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1}$

2) Calculer  $\prod_{k=1}^n \frac{k}{k+2}$

3) Calculer  $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

4) Calculer  $\prod_{k=0}^n (2k+1)$

5) Calculer  $\prod_{k=1}^n (2k)^2$

6) Calculer  $\prod_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j}$

7) Calculer  $\prod_{1 \leq i, j \leq n} i^j$

8) Calculer  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}$

9) Calculer  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \max(i, j)$

## **II) Les moins triviaux**

10) Calculer  $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right)$

11) Calculer  $\prod_{k=0}^n (e^{ikx} + 1)$

12) Calculer  $\prod_{k=0}^{n-1} \left( a e^{\frac{2ik\pi}{n}} - b \right)$

13) Calculer  $\prod_{k=0}^{n-1} (1 + x^{2^k} + x^{2^{k+1}})$

14) Calculer  $\prod_{k=0}^{n-1} (1 + x^{3^k} + x^{2 \cdot 3^k})$

15) Calculer  $\prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k}$

16) Montrer qu'il existe deux complexes  $A, B$  tels que  $\prod_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = A^2 + B^2$

*En construction*